数理解析研究所講究録
第2067巻 2018年 152-155

従来型と数学オンラインテストによる事前事後テスト結果の数式入力ミスを考慮した分析

龍谷大学・理工学部　樋口　三郎 (Saburo Higuchi)
Faculty of Science and Technology,
Ryukoku University

1 背景

数学オンラインテストとは, 教授者のデザインに基づいて確率的にまたは決定論的に数学の問題を出題し, 学習者の数式による解答を受け取って数式処理による採点を行い, 学習者にフィードバックを行う e ラーニングシステムのことである [1]. 日本国内では, 数学オンラインテストを大学数学の学習・教育に利用する試みが行われてきている [2, 3, 4, 5]. 龍谷大学理工学部では, 2015 年度から, 数式処理システム Maple に基づく数学オンラインテスト Maple T.A. を導入し, 入学前教育, 初年次教育, およびそれらの学習評価に利用してきた [6].

従来型の紙によるテストの場合, 学習者は意図する数式そのままを記述する. その際の数式は, 数学の授業で教科書や黒板やノートに書かれるものと同一の規則に従うことが求められる. したがって, 紙のテストで書かれた誤った数式は, 誤った数学的理解を意味する. 一方, 数学オンラインテストでは, 数式処理システムの文法にしたがった数式の解答を求めるが, その文法は, 通常の数学の授業内のものとは異なる. したがって, 数学的理解は正しくても誤った数式を入力することが起こりうる. ここでは, 学習者が, 数式処理システムの文法の理解不足などにより, 意図しない意味の数式を入力してしまうことを数式入力ミスとよぶ.

数式入力ミスは, 数学的理解の程度の測定に対して雑音としてはたらく. そのため, 評価の時点で学習者が数式入力に十分に習熟していて, 数式入力ミスが起こらないようにすることが望ましい. また, 数式入力ミスの少ない, 習熟の容易な数式入力方法を持つシステムの開発も盛んに行われている. しかし, 習熟が十分でない学習者に対して数学オンラインテストによる評価を採用せざるを得ない場合には, 雑音を含む受験データから数学の理解度を推定することが望まれる.

ここでは, 事前テストとして従来型, 事後テストとして数式入力ミスが無視できない数学オンラインテストを行った際に, 受験データを分析して, 理解度の差を推定する試みを報告する.

2 分析

2.1 事前事後テストの設計

龍谷大学理工学部では, 2016 年度から, 入学年度の 4 月初めに高校数学の理解を評価する紙の従来型のテスト, 入学年度の 4,5 月に高校数学の復習となる数学オンラインテストによる学習活動を行っている. さらに 2016 年度には, 入学年度の 9 月に, 数学オンラインテストにより, プレイスメントテストと同等の内容のテストを行った.

4 月と 9 月のテストはそれぞれ, 4,5 月の学習活動の事前事後テストととらえることができる. 事前事後テストは同内容で行うものだが, この場合には, 数学的内容は同一であるものの, 前者は紙による筆記の短答, 後者では数式処理システムの文法にしたがった入力による短答であり, 解答方式が異なっている. また, 実施環境も, 前者は教室内での監督者つきの一斉の非参照のテスト, 後者では自宅や自習室からの Web での受験と異なる. なお, 後者についても, 非参照非相談で行うことを指示し, システムの設定により時間制限を課している. 両者とも, 成績とは無関係であることを明示している.

2.2 受験データ

事前事後テストとも $I = 22$ 問からなり, 受験者 j が問題 i に正解したとき, $R_{ji} = 1$, 不正解したとき $R_{ji} = 0$ とする $J \times I$ の反応パターン行列 R_{ji} を記録した. 受験者 j の $I = 22$ 点満点の点数は $x_j = \sum_{i=1}^{22} R_{ji}$ となる.

受験者数 J と x の平均, 標準偏差を表 1 に示す. また, 両方のテストを受験した学習者について, 事前テストの点数 x_j^{pre} と事後テストの点数 x_j^{post} の差の分布を図 1(a) に示す. もしこれらのデータが, まったく同じ実験条件における事前事後テストの結果であれば, 事後テストの点数が上昇したとは結論できない.

2.3 分析方法

項目応答理論 [7] の 2 パラメタロジスティックモデルでは, 受験者 j が問題 i に正解する確率は

$$P(R_{ji} = 1|\theta_j, a_i, b_i) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-a_i \cdot (\theta_j - b_i)}} \tag{1}$$

とモデル化される. ここで, 実数値 θ_j は学習者の潜在特性である能力値である. 識別力 a_i, 困難度 b_i はともに問題 i の特徴を表す実数値である. 困難度 b_i は問題の難しさ, 識別力 a_i は潜在特性による正解率の変化の鋭敏性を表す.

ここでは, 数式入力ミスは, 数学に関する能力 θ_j と無関係な, しかし受験者に依存する確率 $(1 - \mathrm{e}^{f_j})$ で起きると仮定し, 数学的に正解し, かつ数式入力ミスが起きなかったときに正解すると考えて, (1) を次のように修正する.

$$P(R_{ji} = 1|\theta_j, a_i, b_i) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-a_i \cdot (\theta_j - b_i)}} \times \mathrm{e}^{s_i \cdot f_j}. \tag{2}$$

表 1: 事前事後の点数 x の平均と標準偏差

	受験者数 J	平均	標準偏差
事前	509	16.34	4.13
事後	384	15.71	4.33

表 2: 事前事後の能力値 θ の推定値の平均と標準偏差

	標本サイズ	平均	標準偏差
事前	384	0.05	0.79
事後	384	0.34	0.89

パラメタ $f_j < 0$ は受験者の数式入力への習熟度を表すと解釈できる. また, 問題の特徴量 $s_i \in \{0, 1\}$ は, 非自明な数式入力を伴う問題 i に対して $s_i = 1$, そうでない問題 (たとえば, 数値で表現される整数や分数を入力する, 入力ミスの確率を無視してよい問題) に対して $s_i = 0$ をとる.

モデル (2) は, 数学と数式入力という, 複数の分野の能力値を受験者が持つモデルである, 応答過程に対する一般化潜在特性モデル [8] の一例とみなせる.

項目応答理論 (1) では, R_{ji} のデータから, パラメタ θ_j, a_i, b_i を, 最尤推定などで推定する.

今回の受験データをモデル (2) で分析する際には次の手順をとった.

1. 事前テストのデータを用いて, $s_i = 0$ として, すべての受験者のデータを用いて, 項目パラメタ a_i, b_i, 受験者の事前の能力値 θ_j^{pre} を最尤推定する.

2. 事後テストに対して, 分析者が設問を検討して s_i を決定する.

3. 事前事後テスト両方を受験した受験者の事後テストのデータ, 上で決定した a_i, b_i, s_i を用いて, 受験者の事後の能力値 θ_j^{post}, 数式入力習熟度 f_j を最尤推定する.

最尤推定には, R と Stan を利用して, マルコフ連鎖モンテカルロ法を適用した.

2.4 分析結果

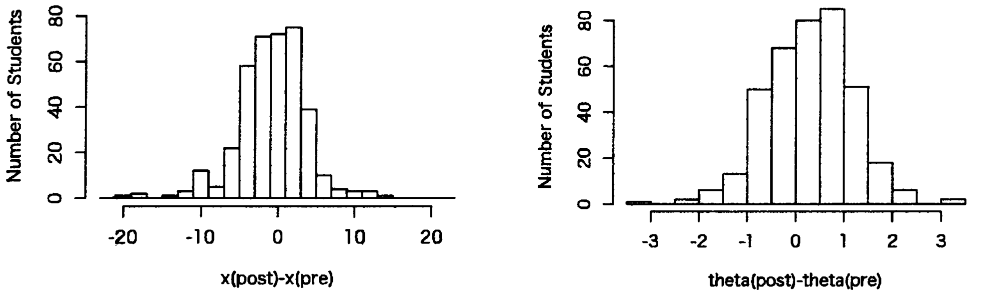
事前事後テスト共通の受験者 $J = 384$ 名について, 事前事後の能力値 θ_j の平均と標準偏差を表 2 に, 事前事後の能力値の差 $\theta_j^{\mathrm{post}} - \theta_j^{\mathrm{pre}}$ の分布を図 1(b) に示す.

3 考察と結論

項目応答理論を拡張したモデルにより, 数式入力ミスの雑音を取り除き, 事前事後の数学の能力値を比較することができる可能性がある.

ただし, 今回分析したデータでは, 数式入力方式以外にも異なる受験条件があり, これらの影響についてさらに検討する必要がある.

今回の分析方法では, 問題の特徴量 s_i を分析者の判断で 0, 1 のどちらかの値に決定した. この妥当性についても検討が必要である.



(a) 事前事後の点数の変化 $x^{\mathrm{post}} - x^{\mathrm{pre}}$ の分布　(b) 事前事後の能力値の変化 $\theta_j^{\mathrm{post}} - \theta_j^{\mathrm{pre}}$ の分布

図 1: 事前事後テストの差

参考文献

[1] 中村泰之. 数学 e ラーニング. 東京電機大学出版局, 2010.

[2] 中村泰之, 中原敬広, 秋山實. STACK と Moodle で実践する数学 e ラーニング. 数理解析研究所講究録, Vol. 1674, pp. 40–46, 2010.

[3] 川添充, 高橋哲也, 吉冨賢太郎. webMathematica を用いた Web 数学学習システムの構築. 日本数学教育学会誌, 臨時増刊 総会特集号 92, p. 491, 2010.

[4] 亀田真澄, 宇田川暢. Moodle, TeX, STACK による数学の e ラーニングの取り組み. In *Moodle Moot Japan 2013 Proceedings*, pp. 22–27. Japan Moodle Association, 2013.

[5] 北本卓也. Maple T.A. の授業援用について. 数理解析研究所講究録, Vol. 1907, pp. 182–187, 2014.

[6] 樋口三郎. 数式入力による数学評価システム Maple T.A. を利用した理工系学部での基礎教育. 数理解析研究所講究録, 第 1978 巻, pp. 72–78, 2015.

[7] 豊田秀樹. 項目反応理論 [入門編]. 朝倉書店, 2014.

[8] Susan Embretson. A general latent trait model for response processes. *Psychometrika*, Vol. 49, No. 2, pp. 175–186, 1984.